3.9 Anwendung auf Lineare Gleichungssysteme

$\boxed{a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n} = b_1$

$a_{21}x_1 + \dots$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Fakt: Jedes lineare Gleichungssystem kann man schreiben in Matrixform

$$\boxed{A \cdot x = b}$$

für die Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ und die Spaltenvektoren $b = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ und $x = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$.

$Ax = b$

$\iff (A, b) \cdot \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|$

$Ax - b$

Fakt: Oft stellt man das LGS durch die zusammengesetzte $m \times (n+1)$-Matrix dar:

$$\boxed{(A, b) \; := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)}$$

Dann ist die Gleichung $\boxed{A \cdot x = b}$ äquivalent zu der Gleichung in Blockmatrixform

$$\boxed{(A, b) \cdot \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{0}.}$$

Die Wirkung jeder elementaren Zeilenumformung auf das Gleichungssystem $Ax = b$ entspricht der Wirkung derselben elementaren Zeilenumformung auf die Matrix (A, b).

Proposition: Ist A eine invertierbare quadratische Matrix, so besitzt das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ die eindeutige Lösung

$$\boxed{x = A^{-1} \cdot b.}$$

Wenn man also einmal die inverse Matrix A^{-1} bestimmt hat, so kann man effizient die Lösungen zu verschiedenen rechten Seiten b berechnen.

$$Ax = b \iff A^{-1}Ax = A^{-1}b \iff x = A^{-1}b.$$

Erinnerung: *(vollständige Gauss-Elimination)* Jedes lineare Gleichungssystem lässt sich durch eine Folge elementarer Zeilenoperationen und Vertauschen von Spalten (also Vertauschen von Variablen) in die folgende Form bringen für ein gewisses $0 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & & & + & a_{1,r+1}x_{r+1} & + & \ldots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
& \ddots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
& & x_r & + & a_{r,r+1}x_{r+1} & + & \ldots & + a_{rn}x_n & = & b_r \\
& & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
& & & & & & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Ist dann $b_j \neq 0$ für ein $j > r$, so hat das Gleichungssystem keine Lösung. Andernfalls erhält man alle Lösungen, indem man die Variablen $x_{r+1}, \ldots, x_n \in K$ beliebig wählt und dann $x_i := b_i - a_{i,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{in}x_n$ setzt für alle $1 \leqslant i \leqslant r$.

Satz: Jede Matrix lässt sich durch eine Folge elementarer Zeilenoperationen und Vertauschen von Spalten in die folgende Blockmatrixform bringen für ein geeignetes r:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

$C \cdot \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Bemerkung: Vertauschen von Spalten in der zur linken Seite eines linearen Gleichungssystems assoziierten Matrix bedeutet Vertauschen von Variablen.

Satz: Ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\boxed{\left(\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline O & O_{*,\ell}\end{array}\right)\cdot \underline{y} = \begin{pmatrix}\underline{d}\\ \underline{e}\end{pmatrix}}$$

mit einem Spaltenvektor $\underline{d}$ der Länge r besitzt eine Lösung genau dann, wenn der Spaltenvektor $\underline{e}$ gleich Null ist. In diesem Fall ist $\underline{y} = \binom{\underline{d}}{\underline{0}}$ eine *partikuläre Lösung*, und die *allgemeine Lösung* ist

$$\boxed{\underline{y} = \begin{pmatrix}\underline{d}\\ \underline{0}\end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c} -C \\ \hline I_\ell\end{array}\right)\cdot \underline{z} = \begin{pmatrix}\underline{d}-C\underline{z}\\ \underline{z}\end{pmatrix}}$$

für einen beliebigen Spaltenvektor $\underline{z}$ der Länge ℓ.

$$\begin{pmatrix}\underline{d}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{d}\\ \underline{e}\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} I_r & C\\ 0 & 0\end{pmatrix}\underline{y} = \begin{pmatrix} I_r & C\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{d}+\underline{x}'\\ \underline{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{d}+\underline{x}'+C\underline{z}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\underline{y} = \begin{pmatrix}\underline{d}\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\underline{x}'\\ \underline{z}\end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\iff \underline{d} = \underline{d}+\underline{x}'+C\underline{z} \iff \underline{x}' = -C\underline{z}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\underline{x}'\\ \underline{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-C\underline{z}\\ \underline{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-C\\ I_\ell\end{pmatrix}\underline{z}$$

4 Vektorräume

4.1 Definition

Sei K ein Körper.

Definition: Ein *Vektorraum über K*, oder kurz ein *K-Vektorraum*, ist ein Tupel $(V, +, \cdot, 0_V)$ bestehend aus einer Menge V mit zwei Abbildungen

$$
\begin{aligned}
+ :&\quad V \times V \to V, \quad (v, v') \mapsto v + v' \\
\cdot :&\quad K \times V \to V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v
\end{aligned}
$$

Skalare Multiplikation

und einem ausgezeichneten Element $0_V \in V$, so dass die folgenden *Vektorraumaxiome* gelten:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(I)} & (V, +, 0_V) \text{ ist eine abelsche Gruppe.} & \\
\text{(II)} & \forall \lambda \in K\ \forall v, v' \in V\colon\ \lambda \cdot (v + v') = \lambda \cdot v + \lambda \cdot v' & \text{(Linksdistributivität)} \\
\text{(III)} & \forall \lambda, \lambda' \in K\ \forall v \in V\colon\ (\lambda + \lambda') \cdot v = \lambda \cdot v + \lambda' \cdot v & \text{(Rechtsdistributivität)} \\
\text{(IV)} & \forall \lambda, \mu \in K\ \forall v \in V\colon\ \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v & \text{(Assoziativität)} \\
\text{(V)} & \forall v \in V\colon\ 1_K \cdot v = v & \text{(Einselement)}
\end{array}
$$

Die Elemente von V nennt man *Vektoren*.

Proposition: Für jeden K-Vektorraum V und alle $v \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

(a) $0_K \cdot v = \lambda \cdot 0_V = 0_V$.

(b) $\lambda \cdot v = 0_V$ genau dann, wenn $\lambda = 0_K$ oder $v = 0_V$ ist.

(c) $(-1_K) \cdot v = -v$.

Bew (a) $0_K \cdot v + 0_K \cdot v = (0_K + 0_K) \cdot v = 0_K \cdot v$

$\Rightarrow 0_K \cdot v = 0_V$.

analog $\lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot (0_V + 0_V) = \dots$

(b) Sei $\lambda \neq 0_K$ und $v \neq 0_V$ aber $\lambda v = 0_V$.

$v = 1_K \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot v = \lambda^{-1} \cdot (\lambda v) = \lambda^{-1} \cdot 0_V = 0_V$

$\Rightarrow$ Widerspruch. qed

(c) Ü.

Beispiel: Die Menge $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ aller $m \times n$-Matrizen über K mit den oben definierten Operationen ist ein K-Vektorraum.

$(- - \quad —)$

Spezialfall: Der Raum $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$ der Spaltenvektoren der Länge n, bzw. der Raum $\mathrm{Mat}_{1\times n}(K)$ der Zeilenvektoren der Länge n über K. Beide kürzt man meist mit K^n ab. Sobald man das Matrixprodukt verwenden möchte, muss man dann aber dazu sagen, ob man Spaltenvektoren oder Zeilenvektoren meint.

$K^n = K \times \dots \times K = \bigtimes_{i=1}^{n} K = \{(x_1, \dots, x_n) \dots\} = \mathrm{Abb}(\{1, \dots, n\}, K)$.

Verallgemeinerung: Für jede Menge I ist die Menge K^I aller Abbildungen $f\colon I \to K$ mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation sowie der Nullabbildung $x \mapsto 0$ als Nullelement ein K-Vektorraum.

Beispiel: Jede Menge mit einem Element besitzt eine eindeutige Struktur als K-Vektorraum und heisst dann *Nullraum.* Zum Beispiel $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ im Fall $m = 0$ oder $n = 0$, oder K^n im Fall $n = 0$, oder K^X im Fall $X = \varnothing$. Einen Nullraum bezeichnet man oft kurz mit $O = \{0\}$.

4.2 Unterräume

Definition: Ein *Unterraum* oder *Teilraum* eines K-Vektorraums V ist eine Teilmenge $U \subset V$ mit den Eigenschaften:

(a) $U \neq \varnothing$. $\rightsquigarrow$ $0_V \in U$.

(b) $\forall u, u' \in U\colon\ u + u' \in U$. $\rightsquigarrow$ $+ : U \times U \to U$

(c) $\forall \lambda \in K\ \forall u \in U\colon\ \lambda \cdot u \in U$. $\rightsquigarrow$ $\cdot : K \times U \to U$

Ist $u \in U$, dann auch $u + (-1_K)\cdot u = u + (-u) = 0_V$ und $(-1_K)\cdot u = -u \in U$.

Proposition: Eine Teilmenge $U \subset V$ ist ein Unterraum genau dann, wenn sie zusammen mit den Restriktionen der Addition und der skalaren Multiplikation von V selbst einen K-Vektorraum bildet.

$0_V + 0_V = 0_V$

$0_U + 0_U = 0_U$

Beispiel: Der Nullraum $O = \{0_V\}$ und V selbst sind Unterräume von V.

Beispiel: Für jede $m \times n$-Matrix A über K ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $L := \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$ ein Unterraum von K^n (Spaltenvektoren).

Bew.: (a) $A \cdot \underline{0} = \underline{0}$

$v, v' \in L \Rightarrow A(v+v') = Av + Av' = 0 + 0 = 0 \Rightarrow v + v' \in L$.

$\lambda \in K,\ v \in L \Rightarrow A\cdot(\lambda v) = \lambda \cdot (Av) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda v \in L$. qed.

Beispiel: Sei I eine Menge. Wir identifizieren eine Funktion $I \to K$, $i \mapsto a_i$ mit dem System ihrer Werte $(a_i)_{i\in I}$. Dann ist die Menge aller Funktionen *mit endlichem Träger*

$$\boxed{K^{(I)} := \left\{(a_i)_{i\in I} \in K^I \;\middle|\; a_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\right\}}$$

ein Unterraum von K^I.

Bew.: $(0)_{i\in I} \in K^{(I)}$.

$\underline{a}, \underline{b} \in K^{(I)} \Rightarrow$ fast alle Koeff. von $\underline{a}+\underline{b}$ sind 0 $\Rightarrow \underline{a}+\underline{b} \in K^{(I)}$.

$\underline{a} \in K^{(I)}$, $\lambda \in K \Rightarrow$ . . . - - . $\lambda \underline{a}$. - . - . $\lambda \underline{a} \in K^{(I)}$. qed.

Beispiel: Im Fall $I = \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ ist K^I der Raum aller unendlichen Folgen in K, und $K^{(I)}$ ist der Unterraum aller Folgen, die ab irgendeiner Stelle konstant Null werden.

4.3 Durchschnitte und Summen

Proposition: Der Durchschnitt jeder nichtleeren Kollektion von Unterräumen von V ist ein Unterraum von V.

Bew.: $\mathcal{U} := \bigcap_{i \in I} U_i$ Unterräume.

$I \neq \emptyset$

(a) $(\forall i: 0_V \in U_i) \Rightarrow 0_V \in \mathcal{U}$.

(b) Seien $v, v' \in \mathcal{U}$. Dann gilt für alle $i \in I$: $v, v' \in U_i$. Also $v + v' \in U_i$. Also $v + v' \in \mathcal{U}$.

(c) analog.

qed.

Proposition: Die Vereinigung zweier Unterräume von V ist ein Unterraum von V genau dann, wenn einer der beiden Unterräume in dem anderen enthalten ist.

Bew.: $U, U' \subset V$ Unterräume.

$U \subset U' \Rightarrow U \cup U' = U'$ ist UR.

$U \supset U' \Rightarrow U \cup U' = U$ " " .

sonst: Sei $u \in U \setminus U'$ und $u' \in U' \setminus U$ } Wäre $U \cup U'$ ein Unterraum, dann wäre $u + u' \in U \cup U'$.
Aber $u + u' \in U \Rightarrow u' = (u+u') - u \in U$ Widerspruch.
und $u + u' \in U' \Rightarrow u = (u+u') - u' \in U'$ " . qed.

Die Vereinigung von Unterräumen ist daher im allgemeinen kein vernünftiger Begriff. Stattdessen hat man den folgenden:

Definition: Die Summe jeder Kollektion von Unterräumen $\{V_i \mid i \in I\}$ von V ist die Teilmenge

$$V' := \boxed{\sum_{i\in I} V_i} := \left\{ \boxed{\sum_{i\in I}{}' v_i} \;\middle|\; \begin{array}{l} v_i \in V_i \text{ für alle } i \in I, \\ v_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I \end{array} \right\} \subset V.$$

Abkü: Die Summe endlich vieler Unterräume $V_1, \ldots, V_n$ schreibt man auch so:

$$V_1 + \ldots + V_n \;:=\; \{\, v_1 + \ldots + v_n \mid \forall i = 1, \ldots, n : v_i \in V_i \,\}.$$

Proposition: Die Summe $\sum_{i\in I} V_i$ ist der eindeutige kleinste Unterraum von V, welcher alle V_i enthält. Genauer gilt

siehe unten

$$\boxed{\sum_{i\in I} V_i = \bigcap_U U,}$$

wobei der Durchschnitt über alle Unterräume $U \subset V$ genommen wird, welche alle V_i enthalten.

Bew.: V' ist Unterraum ✓ z.B.: $\sum'_{i\in I} v_i, \sum'_{i\in I} w_i \in V' \Rightarrow \sum'_{i\in I}(v_i + w_i) = \sum'_{i\in I} v_i + \sum'_{i\in I} w_i \in V'$

$\forall i$: $V' \supset V_i$, da $\forall v_i \in V_i$: $v_i = \sum_{j\in I} \begin{cases} v_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \in V'$.

Für jeden Unterraum $V'' \subset V$, der alle V_i enthält, gilt $V' \subset V''$.

qed.